

Contrôle feedback, corrélations quantiques et correction feedforward

Modèle simple - version 2

Antoine Heidmann - 06/10/08

Cette version 2 tient compte des corrections indiquées par François, et présente le calcul du gain effectif global proposé par Jean-Michel (section V).

I. DESCRIPTION DU MODÈLE, ÉQUATIONS DE BASE

On considère un faisceau laser décrit par un opérateur champ a^{in} , dont l'intensité est asservie par un contrôle en amont (*feedback*) à l'aide d'une porte analogique. L'intensité transmise par la porte est séparée par une lame de façon à fournir le signal d'erreur (champ a_m) et le signal utile (champ a^{out}). On cherche à savoir s'il existe des corrélations entre les faisceaux a_m et a^{out} , et si on peut utiliser ces corrélations pour effectuer une correction en aval (*feedforward*) du faisceau sortant.

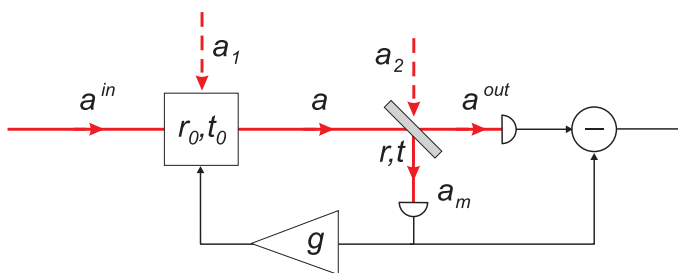


FIG. 1: schéma de principe et définition des différents champs

Les calculs qui suivent sont largement inspirés de l'article [1], ou de la thèse d'Olivier Arcizet [2]. Comme on ne s'intéresse qu'à l'intensité des faisceaux lumineux, on caractérise chaque champ par son intensité moyenne \bar{I} et les fluctuations $\delta p(t)$ de la quadrature d'amplitude du champ. Les fluctuations d'intensité $\delta I(t)$ et le spectre de bruit d'intensité $S_I[\Omega]$ sont définis par

$$\delta I(t) = \sqrt{\bar{I}} \delta p(t), \quad (1)$$

$$S_I[\Omega] = \bar{I} S_p[\Omega], \quad (2)$$

où le spectre $S_p[\Omega]$ de la quadrature d'amplitude est donné par

$$2\pi\delta(\Omega + \Omega') S_p[\Omega] = \langle \delta p[\Omega] \delta p[\Omega'] \rangle. \quad (3)$$

Le caractère quantique des champs se traduit par le fait que $S_p = 1$ pour le vide ou pour un faisceau cohérent, et aussi par la présence des fluctuations du vide qui entrent par la porte analogique et la lame (champs a_1 et a_2).

La porte analogique correspond à une transmission variable $t_0 - g_0 \delta p_m$, proportionnelle aux fluctuations δp_m du signal d'erreur (éq. 16 dans [1]). On obtient alors les équations d'entrée-sortie des champs, qui traduisent les différentes transmission et réflexion des champs par la porte analogique et la lame :

$$\delta p = t_0 \delta p^{\text{in}} - r_0 \delta p_1 - t_0 g \delta p_m, \quad (4)$$

$$\delta p^{\text{out}} = t \delta p - r \delta p_2, \quad (5)$$

$$\delta p_m = r \delta p + t \delta p_2. \quad (6)$$

La première équation décrit la traversée de la porte analogique : transmission de a^{in} avec une amplitude t_0 , réflexion du vide a_1 avec une amplitude r_0 (l'unitarité impose $t_0^2 + r_0^2 = 1$). Le dernier terme dans l'équation (4) représente la commande analogique de la porte par le signal d'erreur, avec un gain de boucle g (qui inclut aussi les champs moyens). Les équations (5) et (6) décrivent la traversée de la lame, de coefficients r et t (avec $r^2 + t^2 = 1$).

En injectant (6) dans (4), les fluctuations δp du champ interne s'expriment en fonction des champs entrants :

$$(1 + t_0 r g) \delta p = \delta p_0 - t_0 t g \delta p_2, \quad (7)$$

où les fluctuations δp_0 sont définies par

$$\delta p_0 = t_0 \delta p^{\text{in}} - r_0 \delta p_1, \quad (8)$$

et correspondent au champ interne sans boucle de contre-réaction (traversée d'une lame de transmission fixe t_0). On peut noter que la différence entre δp_0 et δp^{in} est sans grand intérêt physique puisque la transmission statique t_0 de la porte peut être prise aussi proche de 1 que l'on veut. Dans la suite on va tout exprimer en fonction de δp_0 car c'est plus simple, mais l'équation (8) permet de remonter au champ incident.

En combinant (7) avec (5) et (6), on trouve finalement le signal d'erreur et le champ sortant en fonction uniquement du champ "entrant" a_0 (de fluctuations δp_0) et du vide a_2 :

$$(1 + G) \delta p_{\text{m}} = r \delta p_0 + t \delta p_2, \quad (9)$$

$$(1 + G) \delta p^{\text{out}} = t \delta p_0 - (r + G/r) \delta p_2, \quad (10)$$

où $G = t_0 r g$ est le gain global de la boucle. Comme on pouvait s'y attendre, le signal d'erreur tend vers 0 pour un grand gain, alors que le bruit du faisceau sortant atteint une valeur non nulle du fait du terme supplémentaire en $G \delta p_2$.

II. CONTRÔLE FEEDBACK SEUL

On cherche à réduire le bruit d'intensité classique du faisceau incident à l'aide de la boucle de contre-réaction seule. On désire donc minimiser le spectre S_p^{out} en sortie, en choisissant le gain optimum pour un bruit incident donné. On représente le bruit classique par le facteur de Mandel Q , défini par

$$S_p[\Omega] = 1 + Q[\Omega]. \quad (11)$$

Pour un facteur de Mandel nul, le spectre de bruit se réduit ainsi au bruit de photon standard. A partir des équations (9) et (10) des champs, on obtient l'expression des spectres du signal d'erreur et de l'intensité en sortie :

$$S_p^{\text{m}} = \frac{1 + R Q_0}{(1 + G)^2}, \quad (12)$$

$$S_p^{\text{out}} = 1 + \frac{T Q_0}{(1 + G)^2} + \frac{T}{R} \left(\frac{G}{1 + G} \right)^2, \quad (13)$$

où $Q_0 = t_0^2 Q^{\text{in}}$ est le facteur de Mandel du champ a_0 , $R = r^2$ et $T = t^2$ sont les coefficients de réflexion et de transmission en intensité de la lame. Le bruit sur le signal d'erreur tend donc vers 0 pour un grand gain G , comme le fait le bruit classique dans le faisceau sortant [deuxième terme dans l'équation (13)]. Le bruit en sortie est toutefois contaminé par le dernier terme, égal à T/R pour un grand gain, et qui résulte des fluctuations du vide a_2 entrantes par la lame et réinjectées par la boucle de contre-réaction [il provient du terme supplémentaire en $G \delta p_2$ dans (10)].

Le gain optimum dépend bien sûr du bruit classique initial. On trouve à partir des équations précédentes :

$$G_{\text{opt}} = R Q_0, \quad (14)$$

$$S_{\text{opt}}^{\text{out}} = 1 + \frac{T Q_0}{1 + R Q_0}. \quad (15)$$

Aussi bien le gain à appliquer que l'excès de bruit en sortie sont d'autant plus importants que le bruit classique incident à corriger est important. A la limite d'un très grand bruit classique, on retombe sur un gain infini et un excès de bruit égal à T/R . Evidemment, sans bruit classique incident ($Q_0 = 0$), il est préférable de ne rien faire ($G_{\text{opt}} = 0$) et le bruit en sortie est égal au bruit de photon standard. Pour les situations intermédiaires, le signal d'erreur présente des fluctuations qui semblent corrélées à celles du champ sortant [éqs. (9) et (10)], ce qui pourrait être utilisé pour réduire le bruit en sortie...

III. CORRÉLATIONS MESURE-SORTIE

Ces corrélations sont données par la fonction C^{m-out} définie par :

$$2\pi\delta(\Omega + \Omega') C^{m-out}[\Omega] = \langle \delta p_m[\Omega] \delta p^{out}[\Omega'] \rangle. \quad (16)$$

Comme les champs a_0 et a_2 sont décorrélés, on trouve immédiatement à partir de (9) et (10) :

$$C^{m-out} = \sqrt{\frac{T}{R}} \frac{RQ_0 - G}{(1 + G)^2}. \quad (17)$$

Il y a effectivement des corrélations, mais elles sont nulles lorsque le gain est optimum ($G = RQ_0$) ! Si cela avait un sens clair de séparer les contributions classique et quantique, on peut remarquer qu'il y a des corrélations classiques (proportionnelles à Q_0), comme on s'y attend puisque celles-ci ne sont pas détruites par le bruit de partition de la lame séparatrice. Mais il y a aussi une contribution "quantique" puisque les corrélations sont non nulles en absence de bruit classique ($Q_0 = 0$), dès que le gain G est non nul. Ces deux "contributions" se compensent lorsque le gain est optimal...

IV. CORRECTION EN AVAL

On effectue une correction en aval (*feedforward*) en détectant l'intensité en sortie et en soustrayant à cette mesure le signal d'erreur. Les fluctuations résultantes sont données par

$$\delta p_{ffw} = \delta p^{out} - \kappa \delta p_m, \quad (18)$$

où κ est un paramètre ajustable, qui permet d'optimiser le bruit selon les corrélations m-out. Le spectre résultant s'écrit :

$$S_p^{ffw} = S_p^{out} + \kappa^2 S_p^m - 2\kappa C^{m-out}. \quad (19)$$

On voit tout de suite que s'il n'y a pas de corrélation m-out, il est préférable de ne rien faire ($\kappa = 0$ et donc $S_p^{ffw} = S_p^{out}$). En d'autres termes, **lorsque le gain est optimal, il ne sert à rien de faire une correction en aval et le bruit résultant est donné par l'équation (15).**

Peut-on faire mieux lorsque le gain n'est pas optimal? On a tout ce qu'il faut pour calculer le spectre résultant (19), à partir des équations (12), (13) et (17). On trouve qu'effectivement il est préférable de faire une correction aval, avec un paramètre κ ajusté à

$$\kappa = \sqrt{\frac{T}{R}} \frac{RQ_0 - G}{1 + RQ_0}, \quad (20)$$

et on obtient alors un bruit résultant égal à

$$S_p^{ffw} = 1 + \frac{TQ_0}{1 + RQ_0}. \quad (21)$$

On retrouve exactement le même bruit que celui obtenu avec le gain optimum et sans correction aval !

V. GAIN EFFECTIF GLOBAL

On peut définir un gain effectif global lorsqu'on a à la fois les corrections amont et aval. Pour cela, on écrit le signal de correction aval δp_{ffw} en injectant les équations (9) et (10) de correction amont. On relie ainsi les fluctuations en sortie aux fluctuations entrantes δp_0 et δp_2 :

$$(1 + G) \delta p_{ffw} = (t - r\kappa) \delta p_0 - (r + t\kappa + G/r) \delta p_2. \quad (22)$$

On définit alors le gain effectif global par la relation :

$$1 + G_{\text{eff}} = \frac{1 + G}{1 - r\kappa/t}, \quad (23)$$

ce qui permet d'écrire une équation similaire à une correction feedback seule [éq. (10)] :

$$(1 + G_{\text{eff}}) \delta p_{\text{ffw}} = t \delta p_0 - (r + G_{\text{eff}}/r) \delta p_2. \quad (24)$$

La combinaison des corrections amont et aval est donc équivalente à une correction amont seule, où le gain effectif est donné par l'équation (23). La présence de la boucle aval revient donc simplement à modifier le gain de la boucle de contre-réaction, ce qui peut être utile pour adapter la dépendance en fréquence du gain à celle du bruit classique. Le fonctionnement est optimal lorsque le gain effectif est égal à G_{opt} . On peut noter que cette condition est identique à celle trouvée sur l'optimisation de la boucle feedforward : la condition de bruit optimal sur κ [éq. (20)] est équivalente à $G_{\text{eff}} = G_{\text{opt}}$.

VI. CONCLUSIONS

Un asservissement amont permet de réduire le bruit d'intensité classique (c'est déjà ça!). Le bruit minimum en sortie, atteint pour un gain optimum fini de la boucle de contre-réaction, est toujours au dessus du bruit de photon standard. L'excès de bruit dépend du bruit classique à éliminer et de la transmission de la lame séparatrice utilisée pour fournir le signal d'erreur [éqs. (14) et (15)].

Il existe des corrélations entre le faisceau sortant et le signal d'erreur utilisé dans la boucle. Ces corrélations sont de nature classique pour une part, et quantique d'une autre part, du fait du rebouclage des fluctuations quantiques dans le système. Ces corrélations sont nulles lorsque le gain est optimum [éq. (17)].

Une correction aval permet de réduire le bruit en sortie, mais jamais au-delà du bruit atteint lorsque le gain est optimum [éq. (21)] : la combinaison des deux corrections est en fait équivalente à une seule boucle de correction amont, avec un gain effectif qui combine les gains des deux boucles [éq. (23)]. L'optimisation des deux boucles revient ainsi à rendre ce gain effectif égal au gain optimum. On peut donc obtenir la meilleure réduction de bruit possible de différentes façons : en ne faisant que la correction par boucle de contre-réaction, avec le gain optimal ; en ne faisant que la correction aval, sans utiliser de boucle de contre-réaction ; ou encore dans toute situation intermédiaire combinant corrections aval et amont, en optimisant la correction aval selon le gain amont utilisé.

-
- [1] J. Mertz, A. Heidmann, and C. Fabre, "Generation of sub-Poissonian light using active control with twin beams", Phys. Rev. A **44**, 3229 (1991).
 [2] O. Arcizet, "Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d'un micro-résonateur mécanique", Thèse Paris VI (2006), chapitre 4.3.